Teoria do Risco
Aula 11-Parte 1

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

11/2023

Modelo de Risco individual	Modelo de Risco coletivo
X_i Independentes	X_i Independentes e identicamente distribuídas
$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} B_i I_i$	$S_{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$
$E(S_{ind}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$	$E(S_{col}) = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$
S_{ind}, X_i, B_i, I_i	S_{col}, X_i, N
$M_{S_{ind}}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$	$M_{S_{col}}(t) = M_N(ln\, M_X(t))$
$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i) q_i$	$E(S_{col}) = E(N)E(X)$
$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} var(B_i) q_i + \sum_{i=1}^{n} E(B_i)^2 q_i (1 - q_i)$	$var(S_{col}) = E(X)^2\, var(N) + E(N) var(X)$

Modelos de risco Coletivo- A distribuição de S_{col}, os sinistros coletivos.

O método da convolução a partir da distribuição de X e N.

$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} P^{*k}(s)\, P(N = k)$

$P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq$

Modelos de risco Coletivo

O processo de convolução no modelo de risco coletivo leva em consideração a convolução entre os sinistros ocorridos dado que a quantidade ocorrida também é uma variável aleatória.

Modelo de risco individual	Modelo de risco coletivo
$F^{(k)} = F_k * F^{(k-1)}$	$P^{(k)} = P_k * P^{(k-1)}$
$F_{S_{ind}}^{(2)}(s) = \sum_{j=0}^{s} F_X(s - y_j) P_Y(y_j)$	$F_{S_{col}}^{(2)}(s) = \sum_{k=0}^{2} P^{*k}(s) P_N(k)$

$$X\ (discreto) \rightarrow S_{col}\ (discreto)$$

$$X(contínuo) \rightarrow S_{col}(contínuo)$$

Modelos de risco Coletivo

Pelo método de convolução a partir da distribuição de *X* e *N*.

$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} P^{*k}(s) P_N(k)$

$f_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s) P_N(k)$

$P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq s)$

$p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \ldots + X_k = s)$

X contínuo.

$P^{*k}(s) = \int_0^s P^{*k-1}(s-h) f(h) dh$

$p^{*k}(s) = \int_0^s p^{*k-1}(s-h) f(h) dh$

EXEMPLO 1: Calcular $F_{S_{col}}(s)$, quando $X \sim Exp(\alpha)$ e $N \sim Po(\lambda)$.

$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} P^{*k}(s)\, P(N=k)$

$P^{*k}(s) = \int_0^s P^{*k-1}(s-h) f(h) dh$

Assim:

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{*k}(s) \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Cálculo de $\boldsymbol{P^{*k}(x)}$

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \qquad P^{*1}(x) = F(x) = 1 - e^{-\alpha x}\ ; x > 0$$

$$P^{*k}(s) = \int_h P^{*k-1}(s-h)\, f(h)dh$$

$$P^{*(2)}(s) = \int_0^s P^{*2-1}(s-h) f(h)dh = \int_0^s P^{*1}(s-h) f(h)dh$$

$$P^{*(2)}(s) = \int_0^s \left[1 - e^{-\alpha(s-h)}\right] \alpha e^{-\alpha h} dh$$

...

$$P^{*(2)}(s) = 1 - e^{-\alpha s}(1 + \alpha s)$$

$$P^{*3}(s) = \int_0^s P^{*3-1}(s-h)f(h)dh = \int_0^s P^{*2}(s-h)f(h)dh$$

$$P^{*3}(s) = \int_0^s \{1 - e^{-\alpha(s-h)}[1 + \alpha(s-h)]\}\alpha e^{-\alpha h} dh$$

...

$$P^{*3}(s) = 1 - e^{-\alpha s}\left[1 + \alpha s + \frac{(\alpha s)^2}{2!}\right]$$

Desta forma, então, chega-se à seguinte formula de $P^{*k}(s)$

$$P^{*1}(s) = 1 - e^{-\alpha s}$$

$$P^{*2}(s) = 1 - e^{-\alpha s}(1 + \alpha s)$$

$$P^{*3}(s) = 1 - e^{-\alpha s}\left[1 + \alpha s + \frac{(\alpha s)^2}{2!}\right]$$

$$\cdots$$

$$P^{*k}(s) = 1 - e^{-\alpha s}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\alpha s)^i}{i!}$$

$$\lim_{k\to\infty} P^{*k}(s) = 1 - e^{-\alpha s}e^{\alpha s} = \lim_{k\to\infty} P^{*k}(S \leq s) = 0$$

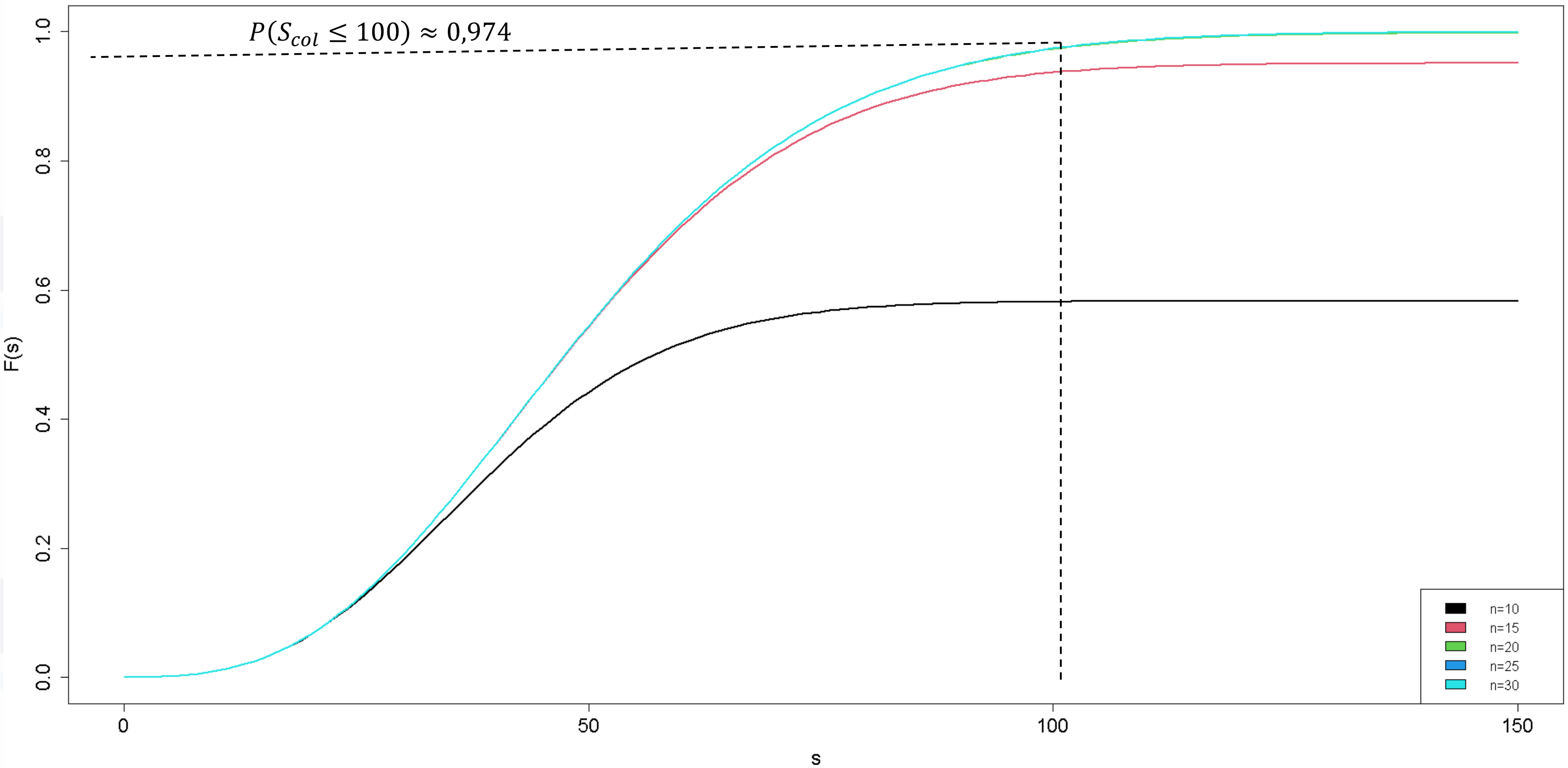
Como:

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{*k}(s) \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

Tem-se que:

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[1 - e^{-\alpha s} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha s)^{i}}{i!} \right] \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=1}^{n \to \infty} \left[1 - e^{-\alpha s} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha s)^i}{i!}\right] \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$



Comportamento de $F_{s_{col}}(S)$ com $\alpha = 0,2, \lambda = 10$ para diferentes quantidade de apólices n.

EXEMPLO 2: Adicionalmente pode-se calcular $p^{*k}(s)$ e $f_{S_{col}}(s)$, quando $X \sim Exp(\alpha)$ e $N \sim Po(\lambda)$.

$$f_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{*k}(s) \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Cálculo de $\boldsymbol{P^{*k}(x)}$

$$p^{*1}(s) = f(s) = \alpha e^{-\alpha s} \quad , s > 0$$

$$p^{*k}(s) = \int_h p^{*k-1}(s-h)\, f(h) dh$$

$$p^{*(2)}(s) = \int_0^s p^{*2-1}(s-h) f(h) dh = \int_0^s p^{*1}(s-h) f(h) dh$$

$$p^{*(2)}(s) = \int_0^s \left[\alpha e^{-\alpha(s-h)}\right] \alpha e^{-\alpha h} dh = \alpha^2 s\, e^{-\alpha s}$$

Cálculo de $P^{*k}(x)$

$$p^{*1}(s) = f(s) = \alpha e^{-\alpha s} \quad , s > 0$$

$$p^{*k}(s) = \int_h p^{*k-1}(s-h)\, f(h) dh$$

$$p^{*2}(s) = \alpha^2 s\, e^{-\alpha s}$$

$$p^{*3}(s) = \int_0^s p^{*3-1}(s-h) f(h) dh = \int_0^x p^{*2}(s-h) f(h) dh$$

$$p^{*3}(s) = \int_0^s \alpha^2 (s-h)\, e^{-\alpha(s-h)} \alpha e^{-\alpha h} dh = \frac{\alpha^3 s^2\, e^{-\alpha s}}{2}$$

Cálculo de $P^{*k}(x)$

$$p^{*1}(s) = \alpha e^{-\alpha s} \quad , s > 0$$

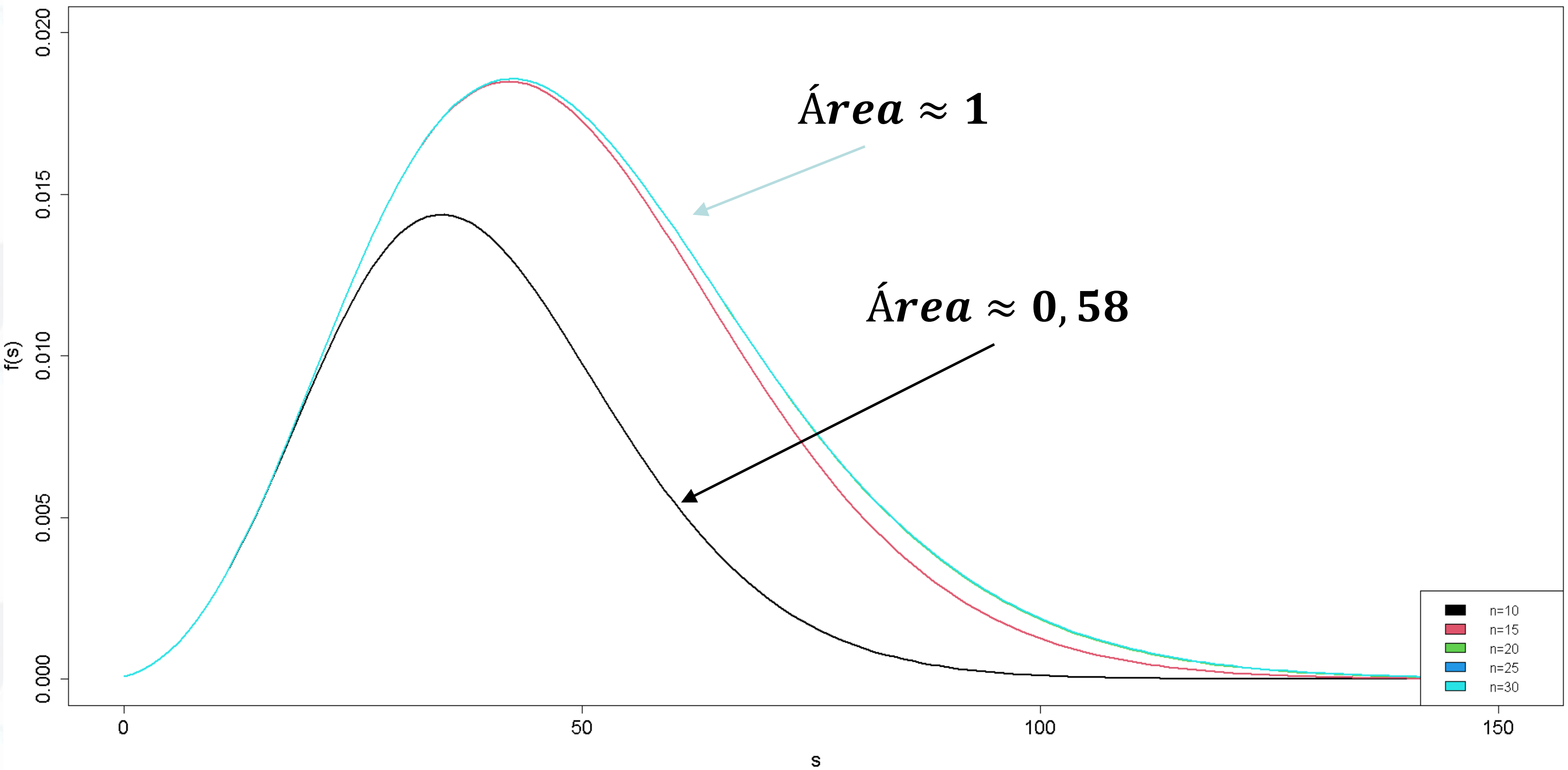
$$p^{*2}(s) = \alpha^2 s\, e^{-\alpha s}$$

$$p^{*3}(s) = \frac{\alpha^3 s^2\, e^{-\alpha s}}{2}$$

$$\dots$$

$$p^{*k}(s) = \frac{\alpha^k s^{k-1} e^{-\alpha s}}{(k-1)!}$$

$$f_{S_{col}}(s) = \sum_{k=1}^{n\to\infty}\left[\frac{\alpha^k s^{k-1} e^{-\alpha s}}{(k-1)!}\right]\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$



Comportamento de $f_{s_{col}}(S)$ com $\alpha = 0,2, \lambda = 10$ para diferentes quantidade de apólices n.

Modelos de risco Coletivo

Pelo método de convolução a partir da distribuição de $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{N}$.

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} P^{*k}(s) P_N(k)$$

$$P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq s)$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s) P_N(k)$$

$$p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \ldots + X_k = s)$$

Modelos de risco Coletivo

Pelo método de convolução a partir da distribuição de X e N.

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s) P_N(k)$$

$$p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \ldots + X_k = s)$$

Quando X é discreto tem-se

$$p^{*0}(s) = \begin{cases} 0 \; se \; s \neq 0 \\ 1 \; se \; s = 0 \end{cases}$$

$$p^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} p^{*k-1}(s-h) p_X(h)$$

Considere h como um dos valores possíveis para X.

EXEMPLO 3: Uma carteira de seguros produz 0, 1 ou 2 sinistros com as respetivas probabilidades: $20\%, 50\%$ e 30%. Um sinistro dessa carteira assume os valores $R\$100$, $R\$200$ ou $R\$300$, com as respectivas probabilidades: $20\%, 70\%$ e 10%.

Construa a distribuição convoluta dos sinistros agregados S_{col}.

			X_i	$R\$100$	$R\$200$	$R\$300$
			$P_{X_i}(x_i)$	0,2	0,7	0,1
N	$P(N)$	S_{col}				
0	0,2	$S_{col} = 0$				
1	0,5	$S_{col} = X_1$	$\{R\$100, R\$200, R\$300\}$			
2	0,3	$S_{col} = X_1 + X_2$	$\{R\$200, R\$300, R\$400, R\$500, R\$600\}$			

Em primeiro lugar, computemos todas as combinações possíveis de frequência e severidades e assim obtemos os valores possíveis de sinistros agregados e associados as probabilidades de ocorrência

Por definição tem-se que $p^{*0}(s) = \begin{cases} 0 \; se \; s \neq 0 \\ 1 \; se \;\; s = 0 \end{cases}$

- Logo para $\boldsymbol{k = 0}$:

$p^{*0}(0) = 1$

$p^{*0}(100) = 0$

$p^{*0}(200) = 0$

$p^{*0}(300) = 0$

$p^{*0}(400) = 0$

$p^{*0}(500) = 0$

$p^{*0}(600) = 0$

Para $\boldsymbol{k=1}$:

Usando $p^{*\mathrm{k}}(\mathrm{s})=\sum_{\mathrm{h}\leq\mathrm{s}}p^{*\mathrm{k}-1}(\mathrm{s}-\mathrm{h})p_X(h)$ sendo k os possíveis valores assumidos por N.

$$\boldsymbol{p^{*1}(0)}=\sum_{h=0}^{0}p^{*1-1}(0-h)p_X(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*1}(100)}=\sum_{h=0}^{100}p^{*1-1}(100-h)p_X(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*1}(200)}=\sum_{h=0}^{200}p^{*1-1}(200-h)p_X(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*1}(300)}=\sum_{h=0}^{300}p^{*1-1}(300-h)p_X(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*1}(400)}=\sum_{h=0}^{400}p^{*1-1}(400-h)p_X(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*1}(500)}=\sum_{h=0}^{500}p^{*1-1}(500-h)p_X(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*1}(600)}=\sum_{h=0}^{600}p^{*1-1}(600-h)p_X(h)$$

$$\boldsymbol{p}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{0}) = p^{*0}(\,0)p_X(0) = 0$$

$$\boldsymbol{p}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{100}) = p^{*0}(100)p_X(0) + \boldsymbol{p}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{0})\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{100}) = \mathbf{0{,}2}$$

$$\boldsymbol{p}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{200}) = p^{*0}\,(200)p_X(0) + p^{*0}(100)p_X(100) + \boldsymbol{p}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{0})\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{200}) = \mathbf{0{,}7}$$

$$\boldsymbol{p}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{300}) = p^{*0}(300)p_X(0) + p^{*0}(200)p_X(100) + p^{*0}(100)p_X(200) + \boldsymbol{p}^{*\mathbf{0}}(\mathbf{0})\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{300}) = \mathbf{0{,}1}$$

$$\boldsymbol{p}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{400}) = p^{*0}(400)p_X(0) + p^{*0}(300)p_X(100) + p^{*0}(200)p_X(200) + p^{*0}(100)p_X(300) + p^{*0}(0)p_X(400) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{p}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{500}) = p^{*0}(500)p_X(0) + p^{*0}(400)p_X(100) + p^{*0}(300)p_X(200) + p^{*0}(200)p_X(300) + p^{*0}(100)p_X(400) + p^{*0}(0)p_X(500) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{p}^{*\mathbf{1}}(\mathbf{600}) = p^{*0}(600)p_X(0) + p^{*0}(500)p_X(100) + p^{*0}(400)p_X(200) + p^{*0}(300)p_X(300) + p^{*0}(200)p_X(400) + p^{*0}(100)p_X(500) + p^{*0}(0)p_X(600) = \mathbf{0}$$

S_{col}	$N = 0$	$N = 1$
0	$p^{*0}(0) = 1$	$p^{*1}(0) = 0$
100	$p^{*0}(100) = 0$	$p^{*1}(100) = 0{,}2$
200	$p^{*0}(200) = 0$	$p^{*1}(200) = 0{,}7$
300	$p^{*0}(300) = 0$	$p^{*1}(300) = 0{,}1$
400	$p^{*0}(400) = 0$	$p^{*1}(400) = 0$
500	$p^{*0}(500) = 0$	$p^{*1}(500) = 0$
600	$p^{*0}(600) = 0$	$p^{*1}(600) = 0$

Para $\boldsymbol{k=2}$:

$$\boldsymbol{p^{*2}(0)} = \sum_{h=0}^{0} p^{*2-1}(0-h)p_X(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*2}(100)} = \sum_{h=0}^{100} p^{*2-1}(100-h)p_X(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*2}(200)} = \sum_{h=0}^{200} p^{*2-1}(200-h)p_X(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*2}(300)} = \sum_{h=0}^{300} p^{*2-1}(300-h)p_X(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*2}(400)} = \sum_{h=0}^{400} p^{*2-1}(400-h)p_X(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*2}(500)} = \sum_{h=0}^{500} p^{*2-1}(500-h)p_X(h)$$

$$\boldsymbol{p^{*2}(600)} = \sum_{h=0}^{600} p^{*2-1}(600-h)p_X(h)$$

Para $\boldsymbol{k = 2}$:

$\boldsymbol{p^{*2}(0)} = p^{*1}(0)p_X(0) = 0$

$\boldsymbol{p^{*2}(100)} = p^{*1}(100)p_X(0) + p^{*1}(0)p_X(100) = 0$

$\boldsymbol{p^{*2}(200)} = p^{*1}(200)p_X(0) + \boldsymbol{p^{*1}(100)p_X(100)} + p^{*1}(0)p_X(200) = 0{,}04$

$\boldsymbol{p^{*2}(300)} = p^{*1}(300)p_X(0) + \boldsymbol{p^{*1}(200)p_X(100)} + \boldsymbol{p^{*1}(100)p_X(200)} + p^{*1}(0)p_X(300) = \boldsymbol{0{,}28}$

$\boldsymbol{p^{*2}(400)} = p^{*1}(400)p_X(0) + \boldsymbol{p^{*1}(300)p_X(100)} + \boldsymbol{p^{*1}(200)p_X(200)} + \boldsymbol{p^{*1}(100)p_X(300)} + p^{*1}(0)p_X(400) = 0{,}53$

$\boldsymbol{p^{*2}(500)} = p^{*1}(500)p_X(0) + p^{*1}(400)p_X(100) + \boldsymbol{p^{*1}(300)p_X(200)} + \boldsymbol{p^{*1}(200)p_X(300)} + p^{*1}(100)p_X(400) + p^{*1}(0)p_X(500) = 0{,}14$

$\boldsymbol{p^{*2}(600)} = p^{*1}(600)p_X(0) + p^{*1}(500)p_X(100) + p^{*1}(400)p_X(200) + \boldsymbol{p^{*1}(300)p_X(300)} + p^{*1}(200)p_X(400) + p^{*1}(100)p_X(500) + p^{*1}(0)p_X(600) = 0{,}01$

S_{col}	$P(N=0)=0,2$	$P(N=1)=0,5$	$P(N=2)=0,3$
	$N=0$	$N=1$	$N=2$
0	$p^{*0}(0)=1$	$p^{*1}(0)=0$	$p^{*2}(0)=0$
100	$p^{*0}(100)=0$	$p^{*1}(100)=0{,}2$	$p^{*2}(100)=0$
200	$p^{*0}(200)=0$	$\boldsymbol{p^{*1}(200)=0,7}$	$\boldsymbol{p^{*2}(200)=0,04}$
300	$p^{*0}(300)=0$	$p^{*1}(300)=0{,}1$	$p^{*2}(300)=0{,}28$
400	$p^{*0}(400)=0$	$p^{*1}(400)=0$	$p^{*2}(400)=0{,}53$
500	$p^{*0}(500)=0$	$p^{*1}(500)=0$	$p^{*2}(500)=0{,}14$
600	$p^{*0}(600)=0$	$p^{*1}(600)=0$	$p^{*2}(600)=0{,}01$
	1	**1**	**1**

Agora se faz necessário sumarizar todas as combinações que resultam no mesmo valor de sinistros.

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s) P_N(k)$$

Logo

$$P_{S_{col}}(0) = p^{*0}(0)P_N(0) + p^{*1}(0)P_N(1) + p^{*2}(0)P_N(2) = 0{,}2$$

$$P_{S_{col}}(100) = p^{*0}(100)P_N(0) + p^{*1}(100)P_N(1) + p^{*2}(100)P_N(2) = 0{,}1$$

$$P_{S_{col}}(200) = p^{*0}(200)P_N(0) + p^{*1}(200)P_N(1) + p^{*2}(200)P_N(2) = 0{,}362$$

$$P_{S_{col}}(300) = p^{*0}(300)P_N(0) + p^{*1}(300)P_N(1) + p^{*2}(300)P_N(2) = 0{,}134$$

$$P_{S_{col}}(400) = p^{*0}(400)P_N(0) + p^{*1}(400)P_N(1) + p^{*2}(400)P_N(2) = 0{,}159$$

$$P_{S_{col}}(500) = p^{*0}(500)P_N(0) + p^{*1}(500)P_N(1) + p^{*2}(500)P_N(2) = 0{,}042$$

$$P_{S_{col}}(600) = p^{*0}(600)P_N(0) + p^{*1}(600)P_N(1) + p^{*2}(600)P_N(2) = 0{,}003$$

$$P_{S_{col}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}04 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}28 \\ 0 & 0 & 0{,}53 \\ 0 & 0 & 0{,}14 \\ 0 & 0 & 0{,}01 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \boldsymbol{P_N(0)} \\ \Rightarrow \boldsymbol{P_N(1)} \\ \Rightarrow \boldsymbol{P_N(2)} \end{array}$$

$$p^{*\mathbf{0}}(s) \qquad p^{*\mathbf{1}}(s) \qquad p^{*\mathbf{2}}(s)$$

$$\boldsymbol{P_{S_{col}}(0)} = 1 \times 0{,}2 + 0 \times 0{,}5 + 0 \times 0{,}3 = 0{,}2$$

$$\boldsymbol{P_{S_{col}}(100)} = 0 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}5 + 0 \times 0{,}3 = 0{,}1$$

...

$$\boldsymbol{P_{S_{col}}(600)} = 0 \times 0{,}2 + 0 \times 0{,}5 + 0{,}01 \times 0{,}3 = 0{,}003$$

$$P_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}2 & s = 0 \\ 0{,}1 & s = 100 \\ 0{,}362 & s = 200 \\ 0{,}134 & s = 300 \\ 0{,}159 & s = 400 \\ 0{,}042 & s = 500 \\ 0{,}003 & s = 600 \end{cases}$$

$$F_{Scol}(s) = \begin{cases} \mathbf{0} & s < 0 \\ \mathbf{0,2} & 0 \leq s < 100 \\ 0{,}2 + 0{,}1 = \mathbf{0,3} & 100 \leq s < 200 \\ 0{,}3 + 0{,}362 = \mathbf{0,662} & 200 \leq s < 300 \\ 0{,}662 + 0{,}134 = \mathbf{0,796} & 300 \leq s < 400 \\ 0{,}796 + 0{,}159 = \mathbf{0,955} & 400 \leq s < 500 \\ 0{,}955 + 0{,}042 = \mathbf{0,997} & 500 \leq s < 600 \\ \mathbf{1} & s \geq 600 \end{cases}$$

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.

Teoria do Risco
Aula 11-Parte 2

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Modelos de risco Coletivo-Convolução

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{*k}(s) P_N(k)$$

$$P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq s)$$

Quando X é discreto tem-se

$$P^{*0}(s) = \begin{cases} 0 \; se \; s \leq 0 \\ 1 \; se \; s > 0 \end{cases}$$

$$P^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} P^{*k-1}(s-h) p_X(h)$$

Considere h como um dos valores possíveis para X.

Exemplo 1: Uma carteira de seguros produz 0,1 ou 2 sinistros com as respetivas probabilidades: 20%,50% e 30%. Um sinistro dessa carteira assume os valores $R\$100$, $R\$200$ ou $R\$300$, com as respectivas probabilidades: $20\%, 70\%$ e 10%.

Construa a distribuição convoluta dos sinistros agregados S_{col}.

X_i	$R\$100$	$R\$200$	$R\$300$
$P_{X_i}(x_i)$	0,2	0,7	0,1

N	$P(N)$	S_{col}	
0	0,2	$S_{col} = 0$	
1	0,5	$S_{col} = X_1$	$\{R\$100, R\$200, R\$300\}$
2	0,3	$S_{col} = X_1 + X_2$	$\{R\$200, R\$300, R\$400, R\$500, R\$600\}$

Por definição tem-se que $P^{*0}(s) = \begin{cases} 0 \text{ se } s \leq 0 \\ 1 \text{ se } s > 0 \end{cases}$

Logo para $\boldsymbol{k = 0}$:

$P^{*0}(0) = 0$
$P^{*0}(100) = 1$
$P^{*0}(200) = 1$
$P^{*0}(300) = 1$
$P^{*0}(400) = 1$
$P^{*0}(500) = 1$
$P^{*0}(600) = 1$

Para $\boldsymbol{k = 1}$:

Usando $P^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} P^{*k-1}(s-h)p_X(h)$ sendo k os possíveis valores assumidos por N.

$$P^{*1}(0) = \sum_{h=0}^{0} P^{*1-1}(0-h)p_X(h)$$

$$P^{*1}(100) = \sum_{h=0}^{100} P^{*1-1}(100-h)p_X(h)$$

$$P^{*1}(200) = \sum_{h=0}^{200} P^{*1-1}(200-h)p_X(h)$$

$$P^{*1}(300) = \sum_{h=0}^{300} P^{*1-1}(300-h)p_X(h)$$

$$P^{*1}(400) = \sum_{h=0}^{400} P^{*1-1}(400-h)p_X(h)$$

$$P^{*1}(500) = \sum_{h=0}^{500} P^{*1-1}(500-h)p_X(h)$$

$$P^{*1}(600) = \sum_{h=0}^{600} P^{*1-1}(600-h)p_X(h)$$

$\boldsymbol{P^{*1}(0)} = P^{*0}(\,0)p_X(0) = 0$

$\boldsymbol{P^{*1}(100)} = P^{*0}(100)p_X(0) + P^{*0}(0)p_X(100) = 0$

$\boldsymbol{P^{*1}(200)} = P^{*0}\ (200)p_X(0) + \boldsymbol{P^{*0}(100)p_X(100)} + P^{*0}(0)p_X(200) = 0{,}2$

$\boldsymbol{P^{*1}(300)} = P^{*0}(300)p_X(0) + \boldsymbol{P^{*0}(200)p_X(100)} + \boldsymbol{P^{*0}(100)p_X(200)} + P^{*0}(0)p_X(300) = 0{,}9$

$\boldsymbol{P^{*1}(400)} = P^{*0}(400)p_X(0) + \boldsymbol{P^{*0}(300)p_X(100)} + \boldsymbol{P^{*0}(200)p_X(200)} + \boldsymbol{P^{*0}(100)p_X(300)} + P^{*0}(0)p_X(400) = \boldsymbol{1}$

$\boldsymbol{P^{*1}(500)} = P^{*0}(500)p_X(0) + \boldsymbol{P^{*0}(400)p_X(100)} + \boldsymbol{P^{*0}(300)p_X(200)} + \boldsymbol{P^{*0}(200)p_X(300)} + P^{*0}(100)p_X(400) + P^{*0}(0)p_X(500) = \boldsymbol{1}$

$\boldsymbol{P^{*1}(600)} = P^{*0}(600)p_X(0) + \boldsymbol{P^{*0}(500)p_X(100)} + \boldsymbol{P^{*0}(400)p_X(200)} + \boldsymbol{P^{*0}(300)p_X(300)} + P^{*0}(200)p_X(400) + P^{*0}(100)p_X(500) + P^{*0}(0)p_X(600) = \boldsymbol{1}$

S_{col}	$N = 0$	$N = 1$
0	$P^{*0}(0) = 0$	$P^{*1}(0) = 0$
100	$P^{*0}(100) = 1$	$P^{*1}(100) = 0$
200	$P^{*0}(200) = 1$	$P^{*1}(200) = 0,2$
300	$P^{*0}(300) = 1$	$P^{*1}(300) = 0,9$
400	$P^{*0}(400) = 1$	$P^{*1}(400) = 1$
500	$P^{*0}(500) = 1$	$P^{*1}(500) = 1$
600	$P^{*0}(600) = 1$	$P^{*1}(600) = 1$

Para $\boldsymbol{k = 2}$:

$$P^{*2}(0) = \sum_{h=0}^{0} P^{*2-1}(0-h)p_X(h)$$

$$P^{*2}(100) = \sum_{h=0}^{100} P^{*2-1}(100-h)p_X(h)$$

$$P^{*2}(200) = \sum_{h=0}^{200} P^{*2-1}(200-h)p_X(h)$$

$$P^{*2}(300) = \sum_{h=0}^{300} P^{*2-1}(300-h)p_X(h)$$

$$P^{*2}(400) = \sum_{h=0}^{400} P^{*2-1}(400-h)p_X(h)$$

$$P^{*2}(500) = \sum_{h=0}^{500} P^{*2-1}(500-h)p_X(h)$$

$$P^{*2}(600) = \sum_{h=0}^{600} P^{*2-1}(600-h)p_X(h)$$

Para $\boldsymbol{k = 2}$:

$$P^{*2}(0) = P^{*1}(0)p_X(0) = 0$$

$$P^{*2}(100) = P^{*1}(100)p_X(0) + P^{*1}(0)p_X(100) = 0$$

$$P^{*2}(200) = P^{*1}(200)p_X(0) + P^{*1}(100)p_X(100) + P^{*1}(0)p_X(200) = 0$$

$$P^{*2}(300) = P^{*1}(300)p_X(0) + \boldsymbol{P^{*1}(200)p_X(100)} + P^{*1}(100)p_X(200) + P^{*1}(0)p_X(300) = 0{,}04$$

$$P^{*2}(400) = P^{*1}(400)p_X(0) + \boldsymbol{P^{*1}(300)p_X(100)} + \boldsymbol{P^{*1}(200)p_X(200)} + P^{*1}(100)p_X(300) + P^{*1}(0)p_X(400) = 0{,}32$$

$$P^{*2}(500) = P^{*1}(500)p_X(0) + \boldsymbol{P^{*1}(400)p_X(100)} + \boldsymbol{P^{*1}(300)p_X(200)} + \boldsymbol{P^{*1}(200)p_X(300)} + P^{*1}(100)p_X(400) + P^{*1}(0)p_X(500) = 0{,}85$$

$$P^{*2}(600) = P^{*1}(600)p_X(0) + \boldsymbol{P^{*1}(500)p_X(100)} + \boldsymbol{P^{*1}(400)p_X(200)} + \boldsymbol{P^{*1}(300)p_X(300)} + P^{*1}(200)p_X(400) + P^{*1}(100)p_X(500) + P^{*1}(0)p_X(600) = 0{,}99$$

S_{col}	$P(N=0)=0,2$	$P(N=1)=0,5$	$P(N=2)=0,3$
	$N=0$	$N=1$	$N=2$
0	$P^{*0}(0)=0$	$P^{*1}(0)=0$	$P^{*2}(0)=0$
100	$P^{*0}(100)=1$	$P^{*1}(100)=0$	$P^{*2}(100)=0$
200	$P^{*0}(200)=1$	$P^{*1}(200)=0{,}2$	$P^{*2}(200)=0$
300	$P^{*0}(300)=1$	$P^{*1}(300)=0{,}9$	$P^{*2}(300)=0{,}04$
400	$P^{*0}(400)=1$	$P^{*1}(400)=1$	$P^{*2}(400)=0{,}32$
500	$P^{*0}(500)=1$	$P^{*1}(500)=1$	$P^{*2}(500)=0{,}85$
600	$P^{*0}(600)=1$	$P^{*1}(600)=1$	$P^{*2}(600)=0{,}99$

$$P_{S_{col}}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0,2 & 0 \\ 1 & 0,9 & 0,04 \\ 1 & 1 & 0,32 \\ 1 & 1 & 0,85 \\ 1 & 1 & 0,99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 0,3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \boldsymbol{P_N(0)} \\ \boldsymbol{P_N(1)} \\ \boldsymbol{P_N(2)} \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{P^{*0}}(s) \qquad \boldsymbol{P^{*1}}(s) \qquad \boldsymbol{P^{*2}}(s)$$

$$F_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} P^{*k}(s) P_N(k)$$

$$F_{Scol}(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 0{,}2 & 0 \leq s < 100 \\ 0{,}3 & 100 \leq s < 200 \\ 0{,}662 & 200 \leq s < 300 \\ 0{,}796 & 300 \leq s < 400 \\ 0{,}955 & 400 \leq s < 500 \\ 0{,}997 & 500 \leq s < 600 \\ 1 & s \geq 600 \end{cases}$$

$$P_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}2 & s = 0 \\ 0{,}1 & s = 100 \\ 0{,}362 & s = 200 \\ 0{,}134 & s = 300 \\ 0{,}159 & s = 400 \\ 0{,}042 & s = 500 \\ 0{,}003 & s = 600 \end{cases}$$

$$F_{Scol}(s) = \begin{cases} \mathbf{0} & s < 0 \\ \mathbf{0{,}2} & 0 \leq s < 100 \\ 0{,}2 + 0{,}1 = \mathbf{0{,}3} & 100 \leq s < 200 \\ 0{,}3 + 0{,}362 = \mathbf{0{,}662} & 200 \leq s < 300 \\ 0{,}662 + 0{,}134 = \mathbf{0{,}796} & 300 \leq s < 400 \\ 0{,}796 + 0{,}159 = \mathbf{0{,}955} & 400 \leq s < 500 \\ 0{,}955 + 0{,}042 = \mathbf{0{,}997} & 500 \leq s < 600 \\ \mathbf{1} & s \geq 600 \end{cases}$$

EXEMPLO 2: Suponha uma carteira composta por 2 apólices identicamente distribuídas e independentes.

X_i	$R\$0{,}00$	$R\$1000{,}00$	$R\$2000{,}00$	$R\$3000{,}00$
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

Modelando essa carteira de acordo com modelo de **risco individual**. Obtenha a função de probabilidade de S_{ind}.

X_i	$R\$0,00$	$R\$1000,00$	$R\$2000,00$	$R\$3000,00$
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

$$p_S(s) = p_{X_1} * p_{X_2}(s) = \sum_{x_1 \leq s} p_{X_2}(s - x_1) p_{X_1}(x_1)$$

S	$S(X_1, X_2)$	P_S
0	(0,0)	0,36
1000	(1000,0) (0,1000)	0,024
2000	(2000,0)(1000,1000)(0,2000)	0,0724
3000	(3000,0)(2000,1000)(1000,2000)(0,3000)	0,3864
4000	(3000,1000)(2000,2000)(1000,3000)	0,0164
5000	(3000,2000)(2000,3000)	0,0384
6000	(3000,3000)	0,1024

EXEMPLO 3

Suponha uma carteira composta por 2 apólices identicamente distribuídas e independentes.

X_i	$R\$0{,}00$	$R\$1000{,}00$	$R\$2000{,}00$	$R\$3000{,}00$
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

Modelando essa carteira de acordo com modelo de **risco coletivo**. Obtenha a função de probabilidade de S_{col}.

Solução:

X_i	$P(X_i = x_i)$	I_i	$P(I_i = i_i)$	$B_i = (X_i \mid I_i = 1)$	$P(B_i = b_i)$
R$0,00	0,6	0	0,6		
R$1000,00	0,02	1	0,4	R$1000,00	$\frac{0,02}{0,4} = 0,05$
R$2000,00	0,06			R$2000,00	$\frac{0,06}{0,4} = 0,15$
R3000,00	0,32			R$3000,00	$\frac{0,32}{0,4} = 0,8$

N	$P(N) = \binom{2}{n} 0,4^n 0,6^{2-n}$	S_{col}	Possíveis valores para S_{col}.
0	0,36	$S_{col} = 0$	
1	0,48	$S_{col} = X_i \ \forall \text{ i} = 1,2$	$\{R\$1000, R\$2000, R\$3000\}$
2	0,16	$S_{col} = X_1 + X_2$	$\{R\$2000, R\$3000, R\$4000, R\$5000, R\$6000\}$

$$p_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s)\, P_N(k)$$

$$p^{*k}(s) = p(X_1 + X_2 + \ldots + X_k = s)$$

Quando X é discreto tem-se

$$p^{*0}(s) = \begin{cases} 0 \; se \; s \neq 0 \\ 1 \; se \; s = 0 \end{cases}$$

$$p^{*k}(s) = \sum_{h \leq s} p^{*k-1}(s-h) p_X(h)$$

Considere h como um dos valores possíveis para X.

S_{col}	$P(N=0)=0,36$	$P(N=1)=0,48$	$P(N=2)=0,16$
	$N=0$	$N=1$	$N=2$
0	$p^{*0}(0)=1$	$p^{*1}(0)=0$	$p^{*2}(0)=0$
1000	$p^{*0}(1000)=0$	$p^{*1}(1000)=0{,}05$	$p^{*2}(1000)=0$
2000	$p^{*0}(2000)=0$	$p^{*1}(2000)=0{,}15$	$p^{*2}(2000)=0{,}0025$
3000	$p^{*0}(3000)=0$	$p^{*1}(3000)=0{,}8$	$p^{*2}(3000)=0{,}015$
4000	$p^{*0}(4000)=0$	$p^{*1}(4000)=0$	$p^{*2}(4000)=0{,}1025$
5000	$p^{*0}(5000)=0$	$p^{*1}(5000)=0$	$p^{*2}(5000)=0{,}24$
6000	$p^{*0}(6000)=0$	$p^{*1}(6000)=0$	$p^{*2}(6000)=0{,}64$
	1	**1**	**1**

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s)\, P_N(k)$$

$$P_{S_{col}}(s) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0,0025 \\ 0 & 0,8 & 0,015 \\ 0 & 0 & 0,1025 \\ 0 & 0 & 0,24 \\ 0 & 0 & 0,64 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} p^{*\mathbf{0}}(s) & p^{*\mathbf{1}}(s) & p^{*\mathbf{2}}(s) \end{array} \end{array} \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,48 \\ 0,16 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \boldsymbol{P_N(0)} \\ \boldsymbol{P_N(1)} \\ \boldsymbol{P_N(2)} \end{array} \end{array}$$

$$P_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

S	$S(X_1,X_2)$	P_S
0	(0,0)	0,36
1000	(1000,0) (0,1000)	0,024
2000	(2000,0)(1000,1000)(0,2000)	0,0724
3000	(3000,0)(2000,1000)(1000,2000)(0,3000)	0,3864
4000	(3000,1000)(2000,2000)(1000,3000)	0,0164
5000	(3000,2000)(2000,3000)	0,0384
6000	(3000,3000)	0,1024

$$P_{Scol}(s) = \begin{cases} 0,36 & s = 0 \\ 0,0240 & s = 1000 \\ 0,0724 & s = 2000 \\ 0,3864 & s = 3000 \\ 0,0164 & s = 4000 \\ 0,0384 & s = 5000 \\ 0,1024 & s = 6000 \end{cases}$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{2} E(B_i)q_i$$

$$E(S_{ind}) = 2200$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{2}[var(B_i)q_i + E(B_i)^2 var(I_i)]$$

$$var(S_{ind}) = 3860000$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

$$E(S_{col}) = 2200$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X)$$

$$var(S_{col}) = 3860000$$

$$M_{S_{ind}}(t) = M_X(t)M_X(t)$$

$$M_X(t) = 0{,}6 + 0{,}02e^{1000t} + 0{,}06e^{2000t} + 0{,}32e^{3000t}$$

Logo

$$\boldsymbol{M_{S_{ind}}(t) = \left(0,6 + 0,02e^{1000t} + 0,06e^{2000t} + 0,32e^{3000t}\right)^2}$$

$$M_{S_{col}}(t) = M_N\big(\ln\big(M_X(t)\big)\big)$$

$$M_N(t) = (0{,}6 + 0{,}4e^t)^2 \qquad M_X(t) = 0{,}05e^{1000t} + 0{,}15e^{2000t} + 0{,}8e^{3000t}$$

$$M_{S_{col}}(t) = [0{,}6 + 0{,}4(0{,}05e^{1000t} + 0{,}15e^{2000t} + 0{,}8e^{3000t})]^2$$

Logo

$$\boldsymbol{M_{S_{col}}(t) = \left(0,6 + 0,02e^{1000t} + 0,06e^{2000t} + 0,32e^{3000t}\right)^2}$$

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQ **atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitib

Teoria do Risco
Aula 11-Parte 3

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

EXEMPLO 1

Suponha uma carteira composta por 2 apólices identicamente distribuídas e independentes.

X_i	$R\$0{,}00$	$R\$1000{,}00$	$R\$2000{,}00$	$R\$3000{,}00$
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

Modelando essa carteira de acordo com modelo de **risco coletivo.** Obtenha a função de probabilidade de S_{col}.

Suponha uma carteira composta por 2 apólices identicamente distribuídas e independentes.

X_i	$R\$0{,}00$	$R\$1000{,}00$	$R\$2000{,}00$	$R\$3000{,}00$
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

X_i	$P(X_i = x_i)$	I_i	$P(I_i = i_i)$	$B_i = (X_i \mid I_i = 1)$	$P(B_i = b_i)$
R\$0,00	0,6	0	0,6		
R\$1000,00	0,02	1	0,4	R\$1000,00	$\frac{0{,}02}{0{,}4} = 0{,}05$
R\$2000,00	0,06			R\$2000,00	$\frac{0{,}06}{0{,}4} = 0{,}15$
$R\$3000{,}00$	0,32			R\$3000,00	$\frac{0{,}32}{0{,}4} = 0{,}8$

N	$P(N) = \binom{2}{n} 0{,}4^n 0{,}6^{2-n}$	S_{col}	Possíveis valores para S_{col}.
0	0,36	$S_{col} = 0$	
1	0,48	$S_{col} = X_i \ \forall \text{ i} = 1,2$	$\{R\$1000, R\$2000, R\$3000\}$
2	0,16	$S_{col} = X_1 + X_2$	$\{R\$2000, R\$3000, R\$4000, R\$5000, R\$6000\}$

S	$S(X_1,X_2)$	P_S
0	(0,0)	0,36
1000	(1000,0) (0,1000)	0,024
2000	(2000,0)(1000,1000)(0,2000)	0,0724
3000	(3000,0)(2000,1000)(1000,2000)(0,3000)	0,3864
4000	(3000,1000)(2000,2000)(1000,3000)	0,0164
5000	(3000,2000)(2000,3000)	0,0384
6000	(3000,3000)	0,1024

$$P_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

$$E(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{2} E(B_i)q_i$$

$$E(S_{ind}) = 2200$$

$$var(S_{ind}) = \sum_{i=1}^{2} [var(B_i)q_i + E(B_i)^2 var(I_i)]$$

$$var(S_{ind}) = 3860000$$

$$E(S_{col}) = E(N)E(X)$$

$$E(S_{col}) = 2200$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X)$$

$$var(S_{col}) = 3860000$$

$$M_{S_{ind}}(t) = M_X(t)M_X(t)$$

$$M_X(t) = 0{,}6 + 0{,}02e^{1000t} + 0{,}06e^{2000t} + 0{,}32e^{3000t}$$

Logo

$$\boldsymbol{M_{S_{ind}}(t) = \left(0,6 + 0,02e^{1000t} + 0,06e^{2000t} + 0,32e^{3000t}\right)^2}$$

$$M_{S_{col}}(t) = M_N\big(\ln\big(M_X(t)\big)\big)$$

$M_N(t) = (0{,}6 + 0{,}4e^t)^2$ $\quad$ $M_X(t) = 0{,}05e^{1000t} + 0{,}15e^{2000t} + 0{,}8e^{3000t}$

$$M_{S_{col}}(t) = [0{,}6 + 0{,}4(0{,}05e^{1000t} + 0{,}15e^{2000t} + 0{,}8e^{3000t})]^2$$

Logo

$$\boldsymbol{M_{S_{col}}(t) = \left(0,6 + 0,02e^{1000t} + 0,06e^{2000t} + 0,32e^{3000t}\right)^2}$$

Fórmula recursiva de Panjer

Alguns modelos de probabilidade podem ser escritos como

$$P(n) = P(n-1)\left(a + \frac{b}{n}\right), n = 1,2,3, \ldots$$

Família de distribuição (a, b) de Panjer.

*Recursividade é quando uma função é definida em termos de si mesma, permitindo que ela seja chamada repetidamente até que uma condição de parada seja atingida

Fórmula recursiva de Panjer

$$P(n) = P(n-1)\left(a + \frac{b}{n}\right), n = 1,2,3,\ldots$$

- Poisson(λ)

$$P(N=n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$P(N=n) = \frac{\lambda}{n}P(N=n-1)$$

$a = 0,\quad b = \lambda \quad$ e $\quad P(N =$

- Binomial Negativa(r, q)

$$P(N=n) = \binom{n+r-1}{n} q^r (1-q)^n$$

$$P(N=n) = \frac{r+n-1}{n}P(N=n-1)$$

$a = 1 - q,\ b = \frac{r-1}{1-q}$ e $P(N=0) = (1-q)^n$.

Considere que o número de sinistros N tal que $N \sim Po(5)$, calcule $P(N=3)$?

$$P(N=3)=\frac{e^{-5}5^3}{3!}\approx 0{,}140$$

ou

$P(N=n)=\frac{5}{n}P(N=n-1)$ $\quad a=0,\quad b=\lambda=5\quad$ e $\quad P(N=0)=e^{-5}$

$$P(N=3)=\frac{5}{3}P(N=2)$$

$$P(N=2)=\frac{5}{2}P(N=1)$$

$$P(N=1)=\frac{5}{1}P(N=0)=5e^{-5}$$

$$P(N=3)=\frac{5}{3}\left[\frac{5}{2}\left(\frac{5}{1}\times e^{-5}\right)\right]$$

$$P(N=3)=\frac{e^{-5}5^3}{3!}$$

Fórmula recursiva de Panjer

$$P(n) = P(n-1)\left(a + \frac{b}{n}\right), n = 1,2,3,\ldots$$

- Poisson(λ)

$$P(N = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$P(N = n) = \frac{\lambda}{n} P(N = n-1)$$

$a = 0,\quad b = \lambda\quad$ e $\quad P(N = 0) = e^{-\lambda}$.

```
poi<-function(n,λ){
  if(n==0){
    poi<-exp(-λ)
  } else{
    poi<-(λ/n)*poi(n-1,λ)
  }
  return(poi)
}
```

- Binomial(k, q)

$$P(N = n) = \binom{k}{n} q^n (1-q)^{k-n}$$

$$P(N = n) = \frac{(k-n+1)q}{n(1-q)} P(N = n-1)$$

$a = -\frac{q}{1-q},\ b = \frac{(k+1)q}{1-q}$ e $P(N = 0) = (1-q)^k$

```
Bin<-function(n,k,q){
  if(n==0){
    Bin<-(1-q)^k
  } else{
    Bin<-((k-n+1)*q)/(n*(1-q))*Bin(n-
1,k,q)
  }
  return(Bin)
}
```

*gramática universal: a possibilidade de recursividade, ou seja, inserir frases dentro de outras frases indefinidamente. Ex.: "João disse que Maria disse que Pedro disse que Joana comprou uma casa".

Fórmula recursiva de Panjer para $P(S_{col})$

Sendo $S_{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$, então:

$$P(S=s) = \frac{1}{1 - a\boldsymbol{P(X=0)}} \sum_{i}^{s} \left[\left(a + \frac{bx_i}{s} \right) P(X = x_i) P(S = s - x_i) \right]$$

em que a e b vem da distribuição de N e $P(S=0) = P(N=0)$

N	$P(N) = \binom{2}{n} 0{,}4^n 0{,}6^{2-n}$	S_{col}	Possíveis valores para S_{col}.
0	0,36	$S_{col} = 0$	$\boxed{\mathbf{0,05 \quad 0,15 \quad 0,8}}$
1	0,48	$S_{col} = X_i \ \forall \ i = 1{,}2$	$\{R\$1000, R\$2000, R\$3000\}$
2	0,16	$S_{col} = X_1 + X_2$	$\{R\$2000, R\$3000, R\$4000, R\$5000, R\$6000\}$

$$P(S = s) = \frac{1}{1 - aP(X = 0)} \sum_{i}^{s} \left[\left(a + \frac{bx_i}{s} \right) P(X = x_i) P(S = s - x_i) \right]$$

$$P(S = s) = \frac{1}{1 + \frac{q}{1-q} P(X = 0)} \sum_{i}^{s} \left[\left(-\frac{q}{1-q} + \frac{(k+1)qx_i}{(1-q)s} \right) P(X = x_i) P(S = s - x_i) \right]$$

$$P(S = s) = \sum_{i}^{s} \left[\left(-\frac{0{,}4}{0{,}6} + \frac{2x_i}{s} \right) P(X = x_i) P(S = s - x_i) \right]$$

$$P(S=s)=\sum_{i}^{s}\left[\left(-\frac{0,4}{0,6}+\frac{2x_i}{s}\right)P(X=x_i)P(S=s-x_i)\right]$$

- $P(S=0)=P(N=0)=0,36$

- $P(S=1000)=\left(-\frac{0,4}{0,6}+\frac{2\times1000}{1000}\right)P(X=1000)P(S=0)=\mathbf{0,024}$

- $P(S=2000)=\left(-\frac{0,4}{0,6}+\frac{2\times1000}{2000}\right)P(X=1000)P(S=1000)+$
$$\left(-\frac{0,4}{0,6}+\frac{2\times2000}{2000}\right)P(X=2000)P(S=0)=\mathbf{0,0724}$$

...

Distribuição de S_{col}

Aproximação pela normal

$$S_{col} \sim N\left(\mu_{S_{col}}, \sigma^2_{S_{col}}\right)$$

$$Z = \frac{S_{col} - E(S_{col})}{\sqrt{var(S_{col})}} \sim N(0,1)$$

Aproximação Gama (transladada)

$$E(S_{col}) = \alpha\beta + k \qquad var(S_{col}) = \alpha\beta^2 \qquad \gamma = E\left[\left(\frac{S_{col} - E(S_{col})}{\sigma_{S_{col}}}\right)^3\right] = \frac{2}{\sqrt{a}}$$

$$f_S(s) = \frac{(s-k)^{\alpha-1} e^{-\frac{s-k}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}$$

Calcule o valor do prêmio puro do **exemplo 1** (utilizando o princípio do percentil) de modo que a probabilidade do sinistro o superar não exceda a 5% (utilizando aproximação pela distribuição normal).

$$P(S_{col} \leq \Pi_S) = 0{,}95$$

$$P\left(Z \leq \frac{\Pi_S - E(S_{col})}{\sigma_{S_{col}}}\right) = 0{,}95$$

$$\frac{\Pi_S - E(S_{col})}{\sigma_{S_{col}}} = z_{0{,}95}$$

$$\Pi_S = E(S_{col}) + \sigma_{S_{col}} z_{0{,}95}$$

$$\Pi_S = 2200 + 1964{,}688\,(1{,}645) = R\$5431{,}91$$

$$P_{Scol}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Calcule o prêmio puro de risco considerando que o limite de indenização para essa carteira seja de $R\$4000{,}00$.

$$P_{S_{col}}(s) = \begin{cases} 0{,}36 & s = 0 \\ 0{,}0240 & s = 1000 \\ 0{,}0724 & s = 2000 \\ 0{,}3864 & s = 3000 \\ 0{,}0164 & s = 4000 \\ 0{,}0384 & s = 5000 \\ 0{,}1024 & s = 6000 \end{cases}$$

Calcule o prêmio puro de risco considerando que o limite de indenização para essa carteira seja de $R\$4000{,}00$.

$$Y = \begin{cases} S_{col}\,, & S_{col} < 4000 \\ 4000\,, & S_{col} \geq 4000 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E(S_{col}; 4000)$$

$$\Pi_Y = \sum_{s=0}^{3000} s\,p(s) + \sum_{s=4000}^{6000} 4000\,p(s) = R\$1956{,}8$$

Modelo de Risco Coletivo

Vantagens

Danos agregados em dada posição no tempo

(Evolução temporal por meio de processo estocástico).

Fórmulas simplificadas,

...

Desvantagem

Precisão

Premissa de que as variáveis sejam iid.

...

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.